

# A JUBILEUMI 50. ORTVAY RUDOLF

## FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI

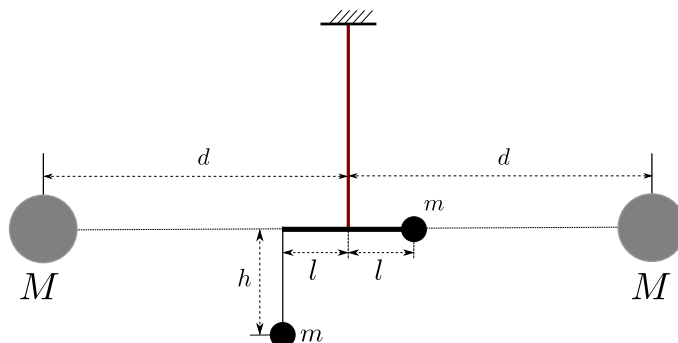
2019. október 25 — november 4.

Az UNESCO-val együttműködésben a világ tudományos közössége idén emlékezik meg Eötvös Loránd (1848-1919), a nagy pontosságú gravitációs fizika úttörője, a geofizika alapító atyja és a felsőoktatás megújítója halálának 100. évfordulójáról. További részletek itt: [Eötvös Loránd-émlékév](#).

Ebben a centenáriumi évben, a tudományos rendezvények és kiállítások sorozatának részeként az Ortway versenyt Eötvös emlékére szerveztük meg. A szervezők egyik célja az volt, hogy néhány olyan problémát is kitűzzünk, amelyek Eötvös máig is aktuális, mind elméleti, mind alkalmazás szempontjából nemzetközileg is meghatározó munkásságához kapcsolódnak. Ráadásul ritka véletlen egybeesés, hogy ez az év jubileumi esemény is, az Ortway versenyt immáron 50. alkalommal rendezzük meg.



1. Az ábrán látható két  $M$  tömegű, egymástól  $2d$  távolságra lévő test között középen elhelyezett Eötvös-inga az egyensúlyi helyzete körül kis amplitúdójú torziós rezgéseket végez. Az Eötvös-ingában a vízszintes,  $2l$  hosszúságú rúd két végéhez egy-egy  $m$  tömegű test van rögzítve, melyek közül az egyik test  $h$  hosszúságú fonalon lóg. A rúd közepén a két  $M$  tömegű testet összekötő egyenesre merőleges irányba mutató vékony,  $D$  direkciós nyomatékú (csavarási nyomatékú) torziós szálhoz van erősítve. Határozzuk meg az inga torziós rezgésének (az  $m$  tömegek torziós szálirányú tengely körüli elfordulásának) periódusidejét! Függ-e a periódusidő  $h$ -tól? Tegyük fel, hogy  $l, h \ll d$  és  $m \ll M$ !



(Cserti József)

2. A ma róla elnevezett budapesti tudományegyetemen 1886-ra felépült fizikai (D) épületben a mellékelt ábrán látható eszközt tervezte és építtette meg Eötvös Loránd a gravitációs állandó mérésére. Az eredeti Cavendish-féle kísérletet úgy módosította, hogy a torziós szálon függő, könnyű alumínium rúd végein lévő  $m$  tömegű kis testeket nem ezekkel azonos magasságban elhelyezett testek vonzásával térítette el, hanem az alumínium rúd alatt helyezte el a vízszintes síkban körbe forgatható,  $M$  tömegű két nagy golyót, ahogyan ez az ábrán is látható. Jelöljük  $d$ -vel a kis testek tömegközéppontjainak egymástól való távolságát, és legyen ugyanennyi a nagy golyók tömegközéppontjainak egymástól mért távolsága is, továbbá jelöljük a kis, valamint a nagy testek tömegközéppontjain átmenő vízszintes síkok távolságát  $h$ -val!



Határozzuk meg, hogy mekkora szöget zár be ezekkel a vízszintes síkokkal az az egyenes, amely az egyik kis test és a hozzá közelebbi nagy golyó tömegközéppontján halad át akkor, amikor a nagy golyók tömegvonzása a legnagyobb forgatónyomatékokot fejt ki a torziós ingára!

Numerikus számítással határozzuk meg, hogy hogyan függ ez a szög a  $h$  távolságtól! Becsüljük meg ezt a szöget a  $R < h \ll d$  határesetben, ahol  $R$  a nagy golyók sugara!

Az ábra forrása Eötvös Lorándnak 1896-ban az *Annalen der Physik und Chemie*-ben közölt cikke, melyet Selényi Pál is közölt 1953-ban, „Eötvös Loránd összegyűjtött munkái” c. művében.

(Radnai Gyula és Cserti József)

3. Eötvös Loránd első nemzetközileg elismert eredményei a kapillaritás jelenségéhez kapcsolódtak. Mérési módszert dolgozott ki a felületi feszültség meghatározására, és megtalálta az összefüggést az anyagok felületi feszültsége és molekulásúlya között (ez az Eötvös-törvény).

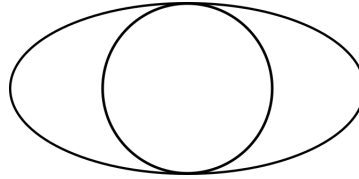
A felületi feszültség igyekszik kisimítani a folyadék felszínét, ezért a felület deformációja (pl. behorpadása) hullámszerűen tovaterjed. Ezek a kapillaris hullámok igen rövid hullámhosszúak, és nem tévesztendőek össze a gravitációs erő hatására a folyadékok határfelületén kialakuló ún. nehézségi hullámokkal. Mérésekből könnyen megállapíthatjuk, hogy a víz felszínén a nagyjából 1 cm hosszú kapillaris hullámok kb. 10 cm/s sebességgel terjednek.

A kapillaris hullámokat jellemző egyik törvényszerűség meglepően emlékeztet a bolygómozgásra vonatkozó harmadik Kepler-törvényre: egy kapillaris síkhullám  $\lambda$  hullámhosszának köbe arányos a hullám  $T$  periódusidejének négyzetével.

Becsüljük meg a fenti adatokból kiindulva a molekulák méretét!

(Vincze Miklós és Dávid Gyula)

4. A Föld felszínén (mindenütt a tengerszinten mérve) a nehézségi gyorsulás (a gravitációs és centrifugális erő vektoriális eredőjének hossza) változik: a pólusokon maximális, az Egyenlítőn minimális a mért érték. Ezt a változást először Jean Richer francia csillagász észlelte 1672-ben, aki a Párizsban (földrajzi szélességét vegyük a feladatban 45 foknak a valódi 49 fok helyett) kalibrált ingaóráját a dél-amerikai Cayenne-ben (földrajzi szélességét kerekítsük a valódi 5 fokról 0 fokra) felállítva azt tapasztalta, hogy az óra pontatlanul jár. E mérést Eötvös akadémiai elnöki székfoglalójában a Föld alakjával kapcsolatos egyik legfontosabb történelmi kísérletnek tartotta.



A különbséget három hatás eredője okozza:

1) A Föld gömbtől eltérő, (csaknem pontosan) forgási ellipszoid alakja miatt a pólusok közelebb vannak a tömegközépponthez; 2) a Föld tengely körüli forgása miatt az Egyenlítőn maximális, a pólusokon pedig nulla a centrifugális erő; illetve 3) a fenti ábrán látható, az ellipszoid és a gömb alak különbségét adó „egyenlítői tömegtöbblet” vonzó hatása az Egyenlítő közelében jobban jelentkezik. A kérdések (melyek megválaszolásához az ingaórát tekintjük ideális matematikai ingának, kis kitérésű szöggel):

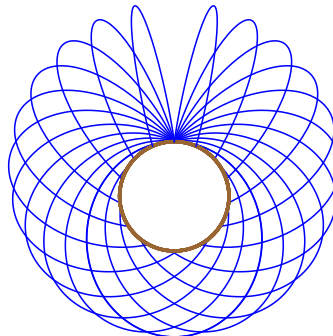
- Késett vagy sietett Richer Párizsban beállított órája Cayenne-ben?
- Becsüljük meg a késés/sietés napi mértékét másodpercben!
- Hasonlítsuk össze számszerűen külön-külön fenti három hatásnak a nehézségi térerősségre gyakorolt hatását a pólus és az Egyenlítő között!

(Timár Gábor és Szarka László)

5. A Föld egy pontjából a második kozmikus sebességnél kisebb  $v_0$  kezdősebességgel  $\alpha$  szögben kilőtt ballisztikus rakéta ellipszispályán mozogva ér ismét Földet.

- Adjuk meg az ellipszispálya paramétereit!
- Határozzuk meg a repülés idejét és a távolságot! Milyen távol van a Földtől a pálya legmagasabb pontja?
- Mekkora legyen az adott  $\alpha$  szögben kilőtt rakéta kezdősebessége, hogy a rakéta pontosan a Föld átellenes pontjába csapódjon be? Mennyi idő alatt ér oda? Mik a lehetséges  $\alpha$  szögek?
- Milyen szögben kell kilőni az adott  $v_0$  kezdősebességgel indított rakétát, hogy az a kilövéstől számítva a legrövidebb idő alatt csapódjon be a Földbe? (A kilövés szöge pozitív.)
- Az alábbi ábra az adott  $v_0$  kezdősebességgel, de különböző szögben indított rakéták pályáit mutatja. Határozzuk meg ezeknek a pályáknak a burkolóját!

A rakéta mozgását tekintjük ballisztikusnak, a légellenállást hanyagoljuk el!



(Cserti József és Dávid Gyula)

6. Számítsuk ki, hogy leszálláskor egy repülőgép hátsó kerekei hány méter hosszú csúszásnyomot hagynak a kifutópályán, és hány joule energia fordítódik a gumi koptatására (amikor a kerék csúszik az aszfalton)! Használjuk az alábbi feltevéseket: Leszállás előtt a kerekek nem forognak. A leszállás sebessége 252 km/h, szöge 3 fok a vízszintes kifutópályához képest, a gép tömege 100 tonna. Álló helyzetben a 70 cm átmérőjű kerekeket fölülről támasztó rugók 0,5 méterre nyomódnak be a leszállás előttihez képest. A csúszási súrlódási együttható 0,7. A gépnek 12 hátsó kereke van egymás mellett, egyenként 100 kg tömegűek. A kerekek csúszása alatt a szárnyakkal a gép manővereket nem végez, a kerekeket nem fékezi.

(Veres Gábor)

7. Asztalon fekvő  $m_1$  és  $m_2$  tömegű testeket ideális fonal köt össze. A kifeszített fonál érinti az asztalon lévő szeget. Az  $m_1$  tömegű testnek a fonálra merőleges sebességet adunk, melynek hatására elindul, és a fonál iránya megtörik a szegnél. Adjuk meg a két test pályáját! A mozgás mindenhol súrlódásmentes.

(Holics László és Tichy Géza)

8. Tekintsünk egy olyan perem nélküli „kereket”, amely csak  $N > 4$  darab vékony, sugárirányú, merev, homogén rúdból áll! A rudak egymáshoz mereven vannak rögzítve úgy, hogy a végeik egy szabályos  $N$ -szög csúcsaiba mutatnak. Az így kialakított testet  $\alpha$  dőlésszögű lejtőre helyezzük. Legalább mekkora súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy a test ne csússzon meg gördülés közben?

(Gombkötő Ákos)

9. Egy sífutó úgy tud emelkedőn felfelé haladni, hogy lábfejeit kissé oldalt fordítva a síléceket V alakban tartja. Gyors mozgással felváltva egyik és másik lábára nehezkedik. Amikor legjobban kitér egyik irányban, akkor a másik lábát egy lépéssel előbbre teszi  $s$  távolságra, majd ugyanezt teszi a másik irányba kitérve, s ezt ismételteti.

Milyen meredek emelkedőn tud felfelé haladni, ha legfeljebb  $\gamma$  szögben tudja lábát oldalt fordítani és  $d$  távolságra tartja őket egymástól? Súlypontja pedig  $h$  magasságban van a talajtól mérve.



Az is korlátozott persze, hogy milyen gyorsan tud felváltva a két lábára nehezkedni, legyen ennek maximális frekvenciája  $f$ . Vegyük úgy, hogy a síléc hosszirányban gyakorlatilag súrlódás nélkül tud csúszni, de oldalirányban nagyon nagy a súrlódási együttható! Le tud-e küzdeni tetszőleges meredekségű emelkedőt, ha elég gyors ritmusra vált?

Hogyan függ a jobbra-balra kitérés amplitúdója az emelkedési szögtől? Függ-e a haladási sebessége az emelkedési szögtől?

(Kaufmann Zoltán)

10. Tegyük fel, hogy a túlzásba vitt klímavédelmi intézkedések hatására a világóceán befagy, és leáll a Nagy Globális Óceáni Szállítószalag! Mennyivel és milyen irányba változik meg ezzel a Föld forgási sebessége?

(Dávid Gyula)

11. Írjuk le a négydimenziós (4D), legszimmetrikusabb erőmentes pörgettyű mozgását! A megfelelő szemléltetés kitervelése része a feladatnak.

*Útmutató:* Szerkesszük meg és vizsgáljuk a 4D Euler-egyenletet a legszimmetrikusabb nem gömbi merev testre!

(Györgyi Géza)

12. Egy hosszú, súlyos, erősen megfeszített kötélen kis amplitúdójú, de egyébként tetszőleges transzverzális hullámcsomag terjed. A kötélen végén a sebességgel arányos erő fékezi. Mekkora ez az arányossági tényező, ha semmilyen hullám nem verődik vissza a kötélen végéről?

(Gnädig Péter)

13. Egyik végén befogott, másik végén szabad hajlékony, rugalmas, egyenletes keresztmetszetű rúd harmonikus, csillapított rezgést végez a síkban csavarodás nélkül. A disszipáció eredete legyen a deformáció sebességével arányos belső súrlódási feszültség. Adjunk módszert a módusok frekvenciáinak és jóságai tényezőinek a meghatározására, a lehetőség szerint explicit eredményt az első két módusra, a gyenge csillapítás határesetében mindegyikre, valamint realiztikus elrendezésben és anyagi állandók felhasználásával néhány numerikus eredményt! Csak a transzverzális rezgésekkel foglalkozunk! A gravitáció elhanyagolható.

(Györgyi Géza)

14. Nyugodt, meleg, felhőtlen nyári napokon megfigyelhetjük, hogy a magasan szálló utasszállító repülőgépek hangja nem lassan erősödik fel, hanem gyorsan, gyakorlatilag hirtelen válik hallhatóvá. Mi a jelenség oka? Adjunk becslést, hol (a horizont fölött milyen magasan) kell keresnünk azt a felénk szálló repülőgépet, aminek a hangját éppen meghalljuk!

(Woynarovich Ferenc)

15. Egy párhuzamos univerzumban a legutóbbi nagy árvíz során a Duna vize betört az egyetemi pincébe. A tűzoltók elindultak lefelé, megvizsgálni a kialakult helyzetet. Még mielőtt a vízszint alá ereszkedtek volna, zseblámpájuk fényében megcsillant egy gyűrű kissé oldalt a víz alatt, amit egyik látogató diáklány ejthetett le az előző Kutatók éjszakája alkalmával. Mivel két tűzoltó is járt diákként az egyetemen a középiskolások számára rendezett ismeretterjesztő „Atomcsill” előadásokon, és akkor nagyon megtetszett nekik a fizika, méréseket kezdtek végezni. Egyikük a gyűrű egy pontjáról jövő fénysugarak közül kiválasztott kettőt, amik azonos függőleges síkban voltak, egymáshoz közel. A távolságuk és a köztük bezárt szög alapján meghatározta a gyűrű víz alatti mélységét. A másik hasonló mérést végzett, de két olyan, egymáshoz közeli fénysugarat használt, amik különböző függőleges síkban távolodtak a nyakéktól, de a vízszintessel azonos szöget zártak be. Ő a társától eltérő értéket kapott a mélységre.

Magyarázzuk meg az eltérést, kiszámolva, hogy milyen értéket kaptak a mélységre, ha a gyűrűt a függőlegessel  $\alpha$  szöget bezáró irányban látták, és az valójában  $h$  mélységben volt! A gyűrűt tekintsük pontszerűnek. Vegyük figyelembe, hogy a betört víz feloldotta a pincében tárolt jégoldó sót és más anyagokat! A keletkezett oldatok sűrűségüknek megfelelően rétegződtek, így a törésmutatójuk csak a függőleges koordináta függvénye volt. Ezt a függést tekintsük adottnak!

(Cserti József és Kaufmann Zoltán)

16. Az atlantiszi – miként az 1991. évi Ortvy-verseny 25. feladata) óta tudjuk – víz alatti civilizáció volt. Az atlantisziak számára fontos volt megbecsülni, hogy mennyire viharos felettük a felszín, vagyis mennyire meredek hullámok fordulnak elő. Erre egy tisztán optikai módszert dolgoztak ki: műszerüket felfelé irányítják, és az égbolt felől érkező fénysugaraknak a zenittől mért szög függvényében felveszik az intenzitás-eloszlását. A pillanatfelvételek azt mutatnák, hogy van valamilyen  $\theta_c$  érték, melynél nagyobb szögek felől nem érkezik számottevő fény, míg ennél kisebb szögek esetén az árnyék bonyolult mintázatot ír le a hullámok miatt.

Az intenzitás időbeli kiátlagolásával a bonyolult mintázat egyszerűsödik, és ha kiszűrjük a hullámok felszínén legalább egyszer visszavert fénysugarakat, akkor a kritikus  $\theta_c$  szög viszonylag könnyen leolvashatóvá válik. Ebből az adatból számítják ki a hullámokat jellemző maximális meredekséget.

Feltételezzük, hogy az egész égboltról származó megvilágítás mérhető.

Kérdéseink:

a) Határozzuk meg a hullám-mereedség és a látószög kapcsolatát! A hullámokat az egyszerűség kedvéért szinuszosnak tekinthetjük.

b) Figyelembe véve, hogy Atlantisz (az idézett Ortvy-feladat megoldása szerint) a Falkland-szigetek közötti szorosban helyezkedett el, a hullámok jelentős része jó közelítéssel egy adott irányból érkezett. Vizsgáljuk meg egydimenziós esetre szorítkozva a kis meredekségű, szinusz alakú hullámok alatti árnyékos szögtartományok időbeli fejlődését!

(Gombkötő Ákos)

17. Sok-sok Ortvy-feladat foglalkozott már kausztikákkal. A legegyszerűbb eset azzal kapcsolatos, hogy ha bögrenkbe ferde irányból széles, közel párhuzamos fénynyaláb esik, akkor a bögren alján vagy a benne levő kávé felszínén fényes görbét látunk. Ezek a görbék a kausztikák, amelyek nagyon nagy (a geometriai optika szerint végtelen) fényintenzitású pontokból állnak. A jelenség megértéséhez elegendő a fénysugarak vonalainak vízszintes síkra vett vetületét vizsgálni. A bögrennek megfelelő körvonalról visszaverődő sugarak burkolóiként kaphatjuk meg a kausztikát.

Vizsgáljuk most az inverz problémát, azaz határozzuk meg, hogy ha adott alakú kausztikát akarunk létrehozni, akkor milyen alakú bögren/tükröző felületet kell használnunk!

a) Első példaként vehetünk félkör alakot.

b) Próbáljuk a problémát általánosán is megoldani!

c) Milyen alakú tükröző felület hoz létre szív alakú kausztikát?

(Kaufmann Zoltán)

18. A galaxis közepe hemzseg a csillagoktól. A középpontban egy 4 millió  $M_\odot$  tömegű fekete lyuk található, amit 1 millió csillag vesz körül egy 1 parsec sugarú gömbben. A csillagok számsűrűsége a középponttól vett távolság függvényében  $r^{-1,75}$ -el, a tömegeloszlásuk  $m^{-2,3}$ -al arányos  $0,2 M_\odot < m < 50 M_\odot$  között. A csillagok sugárzási teljesítménye az  $m$  tömegüktől függően  $(m/M_\odot)^{3,5} L_\odot$ , ahol  $L_\odot = 3,8 \times 10^{26}$  W és  $M_\odot = 2 \times 10^{30}$  kg.

a) Képzeljük el az égboltot egy Földhöz teljesen hasonló bolygó felszínéről, ha az a központi fekete lyuk körül kering  $r$  távolságra! Hány csillag látható szabad szemmel az égbolton?

b) Határozzuk meg a bolygó felszíni hőmérsékletének várható értékét az  $r$  függvényében 0,001 és 1 pc között!

c) Mekkora az esélye annak, hogy a víz folyékony halmazállapotú a bolygón az  $r$  függvényében?

Hanyagoljuk el a csillagközi gázt és a gravitációs lencsehatást! A valószínűség számolásánál húzzuk a csillagok helyét és tömegét véletlenszerűen a megadott eloszlásokból!

(Kocsis Bence)

19. A telehold időnként tisztán látható a nappali égbolton. Becsüljük meg, hogy mennyivel fényesebbnek látszik a holdkorong felülete a Föld felszínéről, mint a nappali égbolt!

*Felhasználható adatok:* Hold geometriai albedója 0,12, spektruma azonos a Nap spektrumával. A Nap 5800 K hőmérsékletű feketetest-sugárzást bocsát ki. A nappali égbolt fényességét számoljuk ki a Naphoz viszonyított iránytól függően, abban a közelítésben, hogy a napfényt szóró gázcsepp mérete sokkal kisebb, mint a fény  $\lambda$  hullámhossza! Hanyagoljuk el a többszörös szóródást és a Föld felszínéről visszavert fényt! Tekintsük a légkört gömbszimmetrikusnak, a hőmérsékletet és a kémiai összetételt pedig a magasságtól független konstansoknak: 250 K és 29 g/mol. Adjuk meg az eredményt 400 nm és 700 nm hullámhosszakon!

(Kocsis Bence, Pál András és Horváth Gábor)

20. A Kis Herceg egyik (csillaga körül körpályán keringő) bolygójának sugara  $R$ , anyaga pedig homogén,  $\rho$  sűrűségű,  $c$  fajhőjű és  $\kappa$  hővezetési tényezőjű sötét (abszolút feketének tekinthető) szilárd közet. A bolygóra a központi csillag felől homogén, állandó  $I$  intenzitású, jó közelítéssel párhuzamos fénynyaláb esik, amely így a felszín felét világítja meg.

Szeretnénk megvizsgálni a bolygó felszínének adott pontján kialakuló napi hőingadozást. Ezért használjunk olyan koordinátarendszert, melynek tengelyei a csillaghoz képest rögzítettek, és amelyben a bolygó forog! Válasszuk  $x$  tengelynek a fénysugarak mindenkori beesési irányával párhuzamos, a bolygó középpontján átmenő egyenest! A bolygó csillag körüli körmozgása és tengelykörüli forgása következtében a bolygó  $\Omega$  szögsebességgel forog az  $x$  tengelyhez képest az arra merőleges  $z$  tengely körül. ( $\Omega$  tehát a központi csillag bolygóról megfigyelhető látszólagos mozgásának a szögsebessége.)

Adjuk meg és megfelelő diagramon ábrázoljuk a bolygó felszíni  $T(\theta, \varphi)$  hőmérsékleteloszlását a szokásos gömbi koordináták, a  $z$  polártengelytől mért  $\theta$  és az  $x$  tengelytől mért  $\varphi$  függvényében! Feltehetjük, hogy a  $T(\theta, \varphi)$  hőmérsékleteloszlás az idők során már állandósult.

(Vigh Máté)

21. Egy szilárd test vízszintes felületét felülről lézerrel világítjuk meg a felületre merőleges irányból. A lézernyaláb intenzitása Gauss profilt követ, vagyis a lézerfolt középpontjától mért  $r$  távolságtól az intenzitás  $\sim e^{-r^2/(2r_0^2)}$  szerint függ, ahol  $r_0 = 7$  mm a lézerfolt nagyságát meghatározó hosszskála. A lézerfény intenzitása a szilárd anyagon belül exponenciális lecsengést mutat a felületre merőleges irányba. A lecsengést az  $l_0 = 3$  mm behatolási mélység határozza meg. A lézerfény úgy fűti a szilárd testet, hogy a térfogategységre jutó teljesítmény a lokális intenzitással egyenesen arányos. A lézer által a szilárd testnek leadott teljes fűtési teljesítmény 0,7 W.

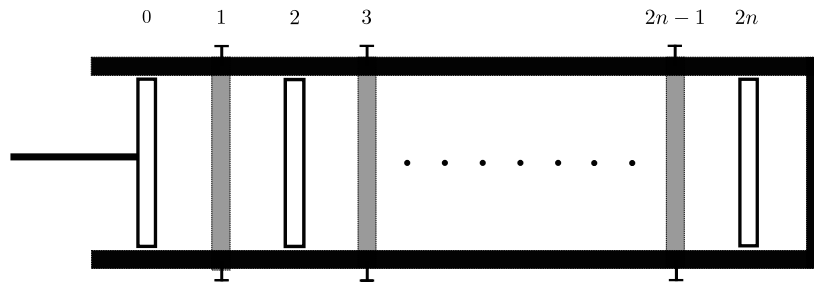
A szilárd anyagon belül a hő terjedése hővezetéssel valósul meg (Fourier-törvény), a hővezetési tényező  $2,1 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . A hővezetési tényező hőmérsékletfüggését elhanyagolhatjuk. A szilárd test a vízszintes felületén keresztül hőt ad le a környezete felé. A lineáris hőleadást jellemző hőátadási tényező a teljes felületen (tehát a megvilágítás helyén is)  $40 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . A szilárd anyag kiterjedését lefelé, illetve a felülettel párhuzamos irányokban végtelen nagyra tekinthetjük.

A lézer bekapcsolása után megvárjuk az állandósult állapotot. A környezeti hőmérséklet végig 300 K.

- Mennyi az állandósult állapotban a hőmérséklet a szilárd test felületén a lézerfolt középpontjában?
- Mennyi az állandósult állapotban a hőmérséklet maximális értéke a szilárd testen belül, és hol veszi a hőmérséklet ezt fel a maximumot?
- Meg lehet-e úgy választani a kísérlet paramétereit, hogy a felületen mérjük a maximális hőmérsékletet?

(Bácsi Ádám és Sepsi Örs)

22. Hőszigetelő falú edényt  $2n$  fal oszt  $2n+1$  egyenlő részre, melyek mindegyikében azonos nyomású és hőmérsékletű egyatomos ideális gáz található. A páratlan sorszámú falak (az elsőtől a  $2n-1$ -ikig) rögzítettek és jó hővezetők, a páros sorszámúak (a másodiktól a  $2n$ -ikig) hőszigetelők és dugattyúként szabadon mozognak. Ugyanilyen az edény legelső, 0. sorszámú fala is, melyet kívülről elkezdjük lassan befelé nyomni. Hogyan változik az első térrészben lévő gáz hőmérséklete a térfogatának függvényében? Mit mondhatunk a mozgó falak elmozdulásairól?



(Fejős Gergely)

23. A közönséges dipólbőrű (*Dipoltergus Absolutiensis L.*) Gumipart címerállata. Jellegzetessége, hogy a bőrszövetének felszínén vékony, rövid és igen kicsiny sűrűségű, (lineárisan) rugalmas nyúlványok találhatóak, a végükön egy módosult sejttel. Ha az állat megijed vagy dühös, fiziológiai folyamatok révén a bőrfelületen jó közelítéssel homogén sűrűségű, a bőrre merőleges irányú dipóluseloszlás alakul ki, és ezzel párhuzamosan a szőrök végeire olyan eredő töltés áramlik, hogy a töltés-dipól kölcsönhatás eltaszítja a szőrök végeit a bőrtől. Az állat „felfúj” állapotában a szőrszálak sokasága termikus egyensúlyban van. Az egyes szálak egymással való kölcsönhatásait, valamint a gravitáció hatását elhanyagolhatjuk, az egyes szálakat egydimenziósnak vehetjük. Adjuk meg a nyúlványok végeinek a bőrfelülettől való átlagos távolságát! Mekkora többlet-energia rendelhető az állat bundájához a fiziológiai változás eredményeképpen?

(Gombkötő Ákos)

24. Egy  $R$  sugarú gömbben olyan kisnyomású ideális gáz van, amelynek jellemző szabad úthossza  $l \approx R$ . A gömbön belül, annak középpontjáról  $h$  távolságra egy  $r \ll R$  sugarú nyomásmérő detektort helyezünk el. A detektorról a gázcseppkék ütközéskor teljesen rugalmasan pattannak vissza. A detektor minden releváns karakterisztikus időhöz képest hosszú időintervallumra vonatkozó átlagolással számítja ki a  $p$  nyomást. Adjuk meg a detektor által mért  $p$  nyomást az origótól számított  $h$  távolság függvényében!

(Gombkötő Ákos)

25. A fizikai kémiában fontos és gyakran vizsgált kérdés, hogy egy adott molekulának milyen rotációs állapotai lehetnek. Ennek leírására egy mindenki által ismert klasszikus fizikai modellt vesznek alapul: a klasszikus fizikai ingát.

Ebből kiindulva vizsgáljuk meg, hogy milyen egyenletek segítségével írhatók le egy adott molekula rotációs állapotai, ha feltesszük, hogy az termikusan kölcsönhat a többi molekulával! Emellett vizsgáljuk meg numerikusan, hogy milyen megoldásokhoz vezetnek a kapott egyenletek a  $T \rightarrow 0$ , illetve a  $T \rightarrow \infty$  határesetekben!

*Segítség:* A forgó rendszer modellezéséhez vegyünk alapul egy síkingát, a rendszer környezetére meg tekintünk úgy, mint végtelen sok harmonikus oszcillátor együttesére!

(Szigeti Balázs Endre)

26. Adjuk meg a lehető legegyszerűbb alakban egy pontszerű dipólus egyik – nem egyenes – erővonalának egyenletét!

(Radnai Gyula)



27. Tekintsünk egy vékony, síkban elhelyezkedő, a Cornu-spirállal megegyező alakú vezető testet! A vezetőre töltést viszünk. Adjuk meg a kialakuló töltéssűrűség-eloszlást!

*Segítség:* ajánlatos a megfelelő koordinátázást bevezetni.

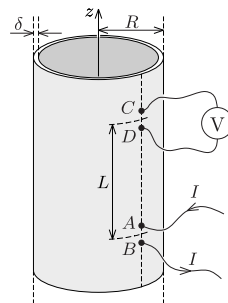
(Gombkötő Ákos)

28. Forgó, merev, vezető gömb belsejét gázzal töltjük meg. A gáz polarizálhatósága a nyomással arányos. Becsüljük meg a gömb elektromos kapacitását a forgás szögsebességének függvényében! A gravitáció elhanyagolható.

(Gombkötő Ákos)

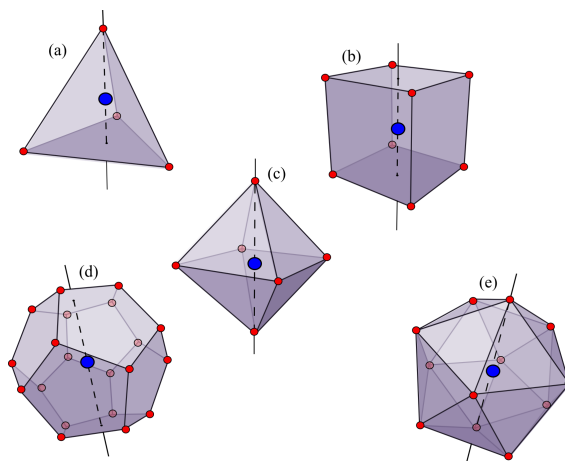
29. Egy igen hosszú,  $R$  sugarú,  $\delta$  falvastagságú ( $\delta \ll R$ ) hengeres cső homogén,  $\rho$  fajlagos ellenállású anyagból készült. A cső tengelye a függőleges  $z$  tengely. A cső  $A$  pontjába  $I$  erősségű áramot vezetünk, a  $B$  pontjából pedig elvezetjük azt, ahol az  $A$  és  $B$  pontok a henger azonos alkotóján helyezkednek el, az  $AB$  távolság pedig  $d \ll R$  (továbbá  $\delta \ll d$ ).

Határozzuk meg az  $A$  és  $B$  pontok fölött  $L$  távolságra elhelyezkedő, egymástól  $d$  távolságra lévő  $C$  és  $D$  pontok közötti feszültséget (ahol  $L \gg d$ ).



(Vigh Máté)

30. Tegyük minden szabályos (platóni) test (tetraéder (a), kocka (b), oktaéder (c), dodekaéder (d), ikozaéder (e)) mindegyik csúcsába  $+q$  töltést, a test középpontjába pedig egy akkora negatív töltést, amely a csúcsok számának  $q$ -szorososa! Forgassuk meg a testeket az ábrán berajzolt tengelyek mentén  $\omega$  szögsebességgel! A testek mozgása nemrelativisztikus.



Mi a legalacsonyabb el nem tűnő elektromos multipólmomentum, és milyen lesz a kisugárzott elektromágneses hullámok összteljesítményének frekvenciafüggése az egyes esetekben (vezető rendben számolva), ha  $\omega$  kicsi? Ezek alapján analóg módon érveljünk amellet, hogy az egyenletesen töltött „végtelen” szabályos test, a gömb valamely szimmetriatengelye körül egyenletesen megforgatva nem bocsát ki elektromágneses sugárzást!

(Vass Máté)

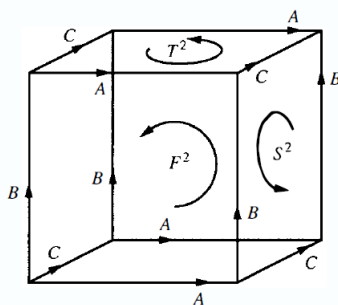
31. Két nagyon hosszú, elhanyagolható vastagságú, egyenes vezető egymástól  $d$  távolságra helyezkedik el úgy, hogy irányuk  $\alpha$  szöggel tér el egymástól. Az egyikben  $I_1$ , a másikban  $I_2$  áram folyik. Mekkora erő hat közöttük? Vizsgáljuk meg az  $\alpha \rightarrow 0$  határesetet! Hogyan kapjuk meg ekkor azt az erőt, mely az áramerősség egységének régi definíciójában szerepelt?

(Széchenyi Gábor és Tichy Géza)

32. Tételezzük fel, hogy ismerjük egy homogén, adott  $L$  hosszú vékony drót egységnyi hosszra jutó  $\lambda$  ellenállását. Ebből a drótból egy ellipszis alakú vezetőkeretet készítünk. A vezetőkeret két tetszőleges pontja közé ismert  $U$  feszültségkülönbséget tudunk kapcsolni. Dolgozzunk ki mérési eljárást az ellipszis geometriai paramétereinek meghatározására, ha semmi más nem áll rendelkezésünkre, mint egy ellenállásmérő és magnetométer! Adjunk konkrét numerikus megoldást is általunk választott paraméterek mellett! Legyünk kreatívak!

(Homa Gábor és Tóth Ábel)

33. A Földönkívüli Fizikustársaság (FFT) egy neves kutatója éppen a legújabb innovációs pályázatát tervezi beadni „Örök áron örök áramot” címmel, melyben a zárt áramkörben folyó áram végtelen ideig való fenntartásának innovatív alkalmazásait taglalja. Barátja nemrégiben közölte legújabb, Nobel-díjat érő eredményét, miszerint világuk valójában egy 3-tórusz,  $T^3$ . Mivel jártas a topológiában, ezért óvatosságra inti a kutatónkat, mondván, hogy a világuk topológiája miatt létezik olyan zárt görbe, ami mentén – a gyakorlati megvalósítás tökéletességétől függetlenül – fizikai képtelenség végtelen ideig áramot fenntartani. Segítsünk kutatóknak belátni a fenti állítást, azaz tekintsük a Maxwell-egyenleteket a 3-tóruszon, és keressünk olyan zárt görbét, amelynek mentén lehetetlen végtelen ideig áramot fenntartani! Miért nem lép fel ilyen probléma a mi  $\mathbb{R}^3$  topológiájú világunkban? Nevezzünk meg, vagy konstruáljunk olyan háromdimenziós sokaságot, amelyen a 3-tóruszhoz hasonló problémák merülnek fel!



*Segítség:* a 3-tórusz egy lehetséges ábrázolása látható a fenti ábrán. A kocka szemközti lapjai „össze vannak ragasztva”, vagyis ha az egyikken kimennénk, a másikon jelennénk meg. A kocka lapjainak ( $T^2$ ,  $S^2$ ,  $F^2$ ) mindegyike az általunk megszokott, „fánk alakú” 2-tóruszt jelöli. Ügyeljünk azonban arra, hogy ennek ellenére a 3-tóruszunknak nincsen pereme! Sokat segít, ha utánanézzünk de Rham tételének.

(Vass Máté és Takátsy János)

34. Oldalról fényképezzük egy relativisztikusan mozgó kerékpár első kerekét. A kerék 20 darab, sugárirányú, elhanyagolható vastagságú küllőt tartalmaz. Hogyan néz ki a fotón a kerékpár kereke, ha rövid expozíciós idővel készítjük a képet? A Lorentz-transzformáción túl vegyük figyelembe azt is, hogy a küllőről késleltetve érkezik a fénysugár a fényképezőgéphez! A fényképen mely pontok látszódnak élesen? Vizsgáljuk a klasszikus határesetet is!

(Széchenyi Gábor)

35. Egy csillaghajó egyenes vonalban mozog,  $d\tau$  sajátidő alatt  $dm = \mu(\tau)d\tau$  tömegű hajtógázt lövellve ki magából hátrafelé. A kibocsátott hajtógáznak a rakétához viszonyított sebessége a hajtómű konstrukciójából adódóan állandó érték:  $u = c/n$ , ahol  $n > 1$ . Az űrhajó kapitánya azonban – ésszerű keretek között – tetszése szerint szabályozhatja a  $\mu(\tau)$  függvényt (persze csak amíg el nem fogy a hajtóanyag).

Az űrhajó utasai kényelmesen szeretnék utazni, ezért megkérlik a kapitányt, hogy az út során állandóan a földi,  $1g$  értékű nehézségi gyorsulást biztosítsa nekik. A kapitány így is tesz. A hajó  $T$  sajátidő elteltével félúthoz ér, ekkor a kapitány kikapcsolja a hajtóművet, néhány órányi kényelmetlen súlytalansággal járó manőverezéssel megfordítja az űrhajót, attól kezdve a célíg a hajtómű – továbbra is állandó,  $1g$  értékű sajátgyorsulást biztosítva az utasoknak – folyamatosan fékez a célíg.

Milyen messze van a célszög a Földtől? Mennyi ideig tartott az utazás a Földről nézve? Az űrhajó kezdő tömegének hányad része érkezett meg a célszöghöz?

Végezzünk egy becslést numerikus adatokkal is: Legyen a célba érő „hasznos tömeg” (utasok, házikedvencek, robotok, videók, helikopterek, élelem, sör, vetőmagvak stb.) 1000 tonna! Az  $n$  paraméter értéke legyen 5, illetve 2! Az utazás teljes  $2T$  ideje 10 földi év. Válaszoljunk számadatokkal a fenti kérdésekre! Mekkora volt a Naprendszerből induló űrhajó kezdő tömege?

Vizsgáljuk meg azt a határesetet is, amikor a rakéta fotonmeghajtással halad!

*Tanács:* használjuk a  $c = \hbar = 1$  egységrendszert! Ekkor az idő- és hosszúságegység nagyjából 1 év, illetve 1 fényév lesz.

(Dávid Gyula)

36. Egyes modern részecskefizikai elméletek szerint az elektronok kölcsönhatnak a hipotetikus sötét anyag legkönnyebb részecskéivel, az ún. „sötét fotonokkal” is. E részecskék kvantumszámai megegyeznek a közönséges fotonokéval, de azoktól eltérően nem nulla a nyugalmi tömegük. Történetünk kezdetén egy elektron elnyel egy vele szemben mozgó sötét fotont. A keletkezett gerjesztett elektron kibocsát egy közönséges fotont, amely aztán elektron-pozitron párra bomlik. Az eredeti elektron és a keletkezett részecskepár mindkét tagja ugyanakkora sebességgel repül tova.

a) Mekkora lehetett maximálisan a sötét foton sebessége, hogy ez a folyamat végbemehessen?

b) Mekkora a sötét foton tömege, ha valóban ezzel a maximális sebességgel mozgott?

*Javaslat:* Használjuk a  $c = 1$  egységrendszert!

(Dávid Gyula)

37. Triviális, hogy a térfogati viszkozitással szemben a nyírási viszkozitás (azaz a nyírási feszültség tenzora) a nemrelativisztikus hidrodinamikában egyetlen áramlási dimenzió esetén nulla.

Mi a helyzet azonban a relativisztikus hidrodinamikával? Nullák-e a nyírási viszkozitási feszültségtenzor komponensei:

a) ha az áramlás háromdimenziós térben egydimenziós, azaz a négyessebesség két térkomponense nulla, és a harmadik térkomponens is csak ettől az egyetlen koordinátától függ;

b) illetve ha egyetlen térdimenzió van?

Hasonlítsuk össze a relativisztikus és nemrelativisztikus eseteket a fenti esetekben! Ha van különbség, mi lehet ennek a fizikai oka?

(Csanád Máté és Nagy Márton)

38. Mi a fizikai jelentése a szabad elektromágneses mező  $T_{kl}$  energiainpulzus-tenzora sajátértékeinek és sajátvektorainak?

*Tanács:* Használjuk fel az  $F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k$  elektromágneses térerősség-tenzorral kapcsolatban feltett hasonló kérdésre (2015. évi Ortvyay-verseny 17. feladat) kapott választ (a képletben  $A_k$  az elektromágneses négyespotenciál négyesvektora)! Különös figyelemmel vizsgáljuk meg a degenerált eseteket!

(Dávid Gyula)

39. Egy párhuzamos Univerzumban a tudósok rájöttek, hogy Maxwell tévedett, és az elektrodinamika egyenletei mégsem lineárisak. A szabad elektromágneses mező leírására általuk javasolt új Lagrange-sűrűségfüggvény a következő:

$$\mathcal{L} = -\frac{E_0^2}{2} \operatorname{sh} \left( \frac{F_{kl} F^{kl}}{2E_0^2} \right),$$

ahol  $F_{kl}$  a szokásos elektromágneses térerősségtenzor,  $E_0$  pedig az energiasűrűség négyzetgyökével megegyező dimenziójú új fizikai állandó.

Hogyan néznek ki az új elektrodinamika „anyag egyenletei”? Vizsgáljuk meg az ebben az elméletben kialakuló „elektromágneses” síkhullámok tulajdonságait! Milyen új jelenségek lépnek fel, ha a képletben a  $\operatorname{sh}$  függvényt a  $\sin$  függvényre cseréljük?

(Dávid Gyula)

40. Egy párhuzamos Univerzumban Einstein még időben felhagyott a kutatói pályával, és egy nevének nem nevezett cégnél helyezkedett el programozóként. Ezért nem volt alkalma levezetni a róla elnevezett gravitációs egyenletet, a speciális relativitáselméletet azonban még sikerült megalkotnia. Így a fizikus társadalom a gravitáció jelenségéről Einstein nélkül a következőkre jutott:

A Newton-féle gravitáció alapegyenletét ( $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ ) kovariáns, dinamikát leíró egyenletté alakították úgy, hogy bevezettek egy  $h_{\mu\nu}(x)$  szimmetrikus tenzort, amely a következő egyenletnek tesz eleget  $\square h_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ , ahol  $T_{\mu\nu}$  az energiaimpulzus-tenzor. A fenti egyenletnek megfelelő hatás alakja (indexek nélkül)  $S_1 \sim \int d^4x \left( \frac{1}{G} \partial h \partial h + h T \right)$ . (Tegyük ki az indexeket és a numerikus faktorokat!) Jelöljük  $\eta_{\mu\nu}$ -vel a szokásos Minkowski-féle metrikus tenzort, amellyel „fel-le húzhatjuk” az indexeket! Legyen  $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$  szignatúrájú! Számoljuk ki a fenti,  $S_1$  hatáshoz tartozó szimmetrikus energiaimpulzus-tenzort! Lássuk be, hogy ez nem lesz egyenlő  $T$ -vel, majd egészítsük ki a hatást a hiányzó taggal! Jelöljük az így kapott hatást  $S_2$ -vel! Folytassuk ezt a procedúrát! Igaz-e, hogy határesetben visszakapjuk a teljes Einstein–Hilbert-féle hatást? A gravitációs mezőelmélet  $h_{\mu\nu}(x)$  tenzora alapján hogyan kaphatjuk meg az általános relativitáselmélet  $g_{\mu\nu}(x)$  tenzorát? Mi a fizikai magyarázata annak, hogy ki kell egészítenünk az eredeti energiaimpulzus-tenzort?

(Vass Máté)

41. Tekintsük a Világegyetem tágulását leíró kétparaméteres kozmológiai Einstein–Fridman–de Sitter–Lemaître–Robertson–Walker-egyenletet szokásos dinamikai (evolúciós) egyenletnek, és tanulmányozzuk az állapotok időbeli fejlődését a paraméterek terében! Szorítkozzunk a jelenlegi Világegyetemet jól jellemző  $p = 0$  állapotegyenlettel leírható korszakra – ekkor a tágulás során egy adott anyagdarab energiája is megmarad.

A kozmológia fő kérdése a galaxisok távolodását is leíró  $a(t)$  skálafüggvény meghatározása, az EFdSLRW-egyenletrendszer is erre vonatkozik. Az  $a(t)$  függvény azonban közvetlenül nem mérhető. Ezért tekintsük állapotterünk koordinátáinak a lokálisan is mérhető adatokkal kifejezhető  $x = H(t) \sqrt{3c^4/8\pi G\varepsilon(t)}$  és az  $y = 3\Lambda/8\pi G\varepsilon(t)$  mennyiségeket, ahol  $c$  a fénysebesség,  $G$  a gravitációs állandó,  $\Lambda$  az Einstein által bevezetett kozmológiai állandó,  $H(t)$  a pillanatnyi Hubble-állandó, végül  $\varepsilon(t)$  az Univerzum pillanatnyi teljes energiasűrűsége. Mind az  $x$ , mind az  $y$  paraméter felvehet pozitív és negatív értékeket is (miért?).

Helyezzük el az  $x$  és  $y$  változók síkján a különböző jellegű kozmológiai modelleket elválasztó görbéket, így a zárt és nyílt terű megoldások határgörbéjét, valamint a lassuló és a gyorsuló tágulás határát! Keressük meg a kozmológiai fejlődési egyenlet vonzó és taszító fixpontjait, vonzó és taszító sokaságait, az attraktorokat és repellorokat, vizsgáljuk meg az egyes megoldások stabilitását! Mindezek alapján vázoljuk fel az egyes pontokon átmenő kozmikus fejlődési trajektóriákat! (Egy kézzel készült, de áttekinthető, és magyarázatokkal ellátott vázlatos rajz többet ér, mint egy számítógéppel készült, pontos, ám a magyarázatokat nélkülöző iránymező.) Vázlatosan mutassuk be az ábra egyes tartományaihoz tartozó, jellegükben különböző  $a(t)$  megoldásgörbéket is! Hol helyezkednek el állapotterünkben a közismert egyparaméteres Fridman-modellcsalád tagjai?

(Dávid Gyula)

42. Vizsgáljuk a Naprendszer leegyszerűsített modelljét, amely csak a Naptól és a Jupiterből áll! Mennyi energiát sugároz ki a rendszer gravitációs hullámok formájában a bolygó egyetlen keringési periódusa alatt? Becsüljük meg ennek alapján azt az időt, ami után a Jupiter energiáját elveszítve a Napba spirálozik! Hasonlítsuk össze ezt az időskálát más feltételezett asztrofizikai és részecskefizikai folyamatok karakterisztikus idejével! Ismételjük meg a számolást és a becslést az egész Tejútrendszerre!

(Dávid Gyula)

43. Egy kvantumrészecske egyetlen térbeli dimenzióban mozog, és a szokásos térbeli adatain felül még egy belső szabadsági foka van, amely egy kétértékű változóval írható le. A rendszer Hamilton-operátora a következő (használjuk a  $\hbar = 1$  egységrendszert):

$$\hat{H}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{p} \\ \hat{p} & -\hat{x} \end{pmatrix},$$

ahol  $\hat{x}$  és  $\hat{p}$  a szokásos hely- és impulzusoperátorok.

- a) Számítsuk ki a fenti Hamilton-operátor sajátértékeit és sajátvektorait!  
 b) Határozzuk meg a rendszer időfejllesztő operátorát, és fejezzük ki a legegyszerűbb formában a keltő és eltüntető operátorok segítségével!

(Dávid Gyula)

44. A fukushimai atomkatasztrófa alatt óceánba ömlő radioaktív anyag mutációt okozott a vízi élővilágban. Brit tudósok egy csoportja Sir Hamilton vezetésével egy új puhatestű élőlényt fedezett fel. A faj sok hasonlóságot mutat az *Octopodák* rendjével, de az egyedeknek 8 helyett tetszőleges,  $N$  számú karjuk lehet. Minden egyes karjukon azonos  $M$  számú szívókorong-sejt található. A serény tudósok azt is kiderítették, hogy a korongok között csak egy hajszálvékony kvantummező található, és az információt egyetlen elektron szállítja korongról-korongra ugrálva a karokon a központi agyig (amely egyetlen egy sejtből áll) és vissza. El is nevezték az élőlényt *Polypus quantus*-nak (ha nőstény, akkor *Polypus quanta*). Sajnos a szerencsétlen élőlény a gyors evolúció miatt már nem találja a saját irányait, így nem tudja, hol vehetné fel a saját értékeit. Segítsünk neki, és találjunk analitikus formulát a polip energia-sajátértékeire és sajátirányaira!  
*Segítség:* A tudósok találtak egy leszakadt lábat, és sikerült kimérniük a polip energia-sajátértékeit, sőt még a hullámfüggvényeket is! Azt tapasztalták, hogy az összes on-sejt (on-site) energia értéke ugyanaz minden sejten, és a sejtek közötti kvantummező nagysága is helyfüggetlen.

(Colin Lambert, Tajkov Zoltán és Koltai János)

45. Tekintsük a következő hatásfukcionált, ahol  $r > 0$ :

$$S[r] = \int dt \left( \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V(r) \right), \quad V(r) = \frac{\lambda}{r^2}.$$

a) Lássuk be, hogy a fenti hatásfüggvény skálainvariáns, azaz az  $r(t) \rightarrow s^\alpha r(st)$  transzformáció szimmetriája a rendszernek ( $\alpha$  meghatározandó,  $s \in \mathbb{R}^+$ )! Határozzuk meg az ehhez tartozó Noether-töltést (jelöljük ezt  $\mathcal{D}$ -vel)!

b) Kanonikusan kvantáljuk meg a rendszert, majd számoljuk ki a  $[\mathbf{H}, \mathcal{D}]$  kommutátort! Magyarázzuk meg a kapott eredményt!

c) Írjuk fel a rendszerhez tartozó időfüggetlen Schrödinger-egyenletet helyreprezentációban, majd adjuk meg a megoldás viselkedését az  $r \rightarrow 0$  határesetben! Vizsgáljuk meg a másik határesetet is ( $r \rightarrow \infty$ )! Mi történik, ha  $2m\lambda < -1/4$ ? Értelmezzük az eredményt!

*Segítség:* nézzük meg a valószínűségi áramsűrűséget az első határesetben!

(Vass Máté)

46. Tekintsünk egy (2D-s) Sierpiński-háromszög alakú szilárdtestet! Az a) ábra a Sierpiński-háromszög iterációját illusztrálja, maga a fraktál végtelen sok iteráció után áll elő.

Legyen minden csúciban egy  $m$  tömegű test, minden él helyén pedig egy  $k$  rugóállandójú rugó, valamint használjunk periodikus határfeltételt! Határozzuk meg az így kapott szilárdtestmodell hőkapacitásának hőmérsékletfüggését, ha  $T \rightarrow 0$ , valamint határozzuk meg ezeknek a fononoknak az állapotegyenletét!

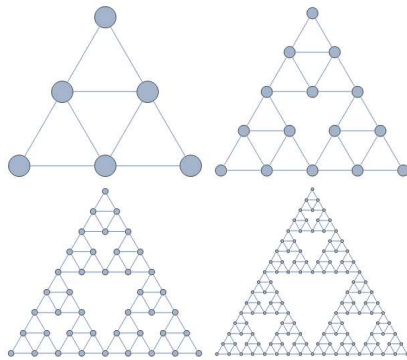
*Segítség:* Mivel ez a probléma visszavezethető a fraktálon való bolyongásra, elég, ha csak a skalárproblémát tekintjük, azaz a rugóerőt minden esetben vehetjük egydimenziósnak (tehát az  $i$ -edik pont elmozdulásának mozgásegyenlete  $m\ddot{u}_i = k \sum_j (u_i - u_j)$ , ahol az összegzés az összes szomszédos pontra vonatkozik). Emellett hasznos, ha emlékszünk a Debye-modellre.

Ezután próbáljuk általánosítani a fenti eredményt a Sierpiński-háromszög tetszőleges  $d$  Euklidészi dimenziós esetére (segítségképp lásd a b) ábrán a 3D Sierpiński-gúlát).

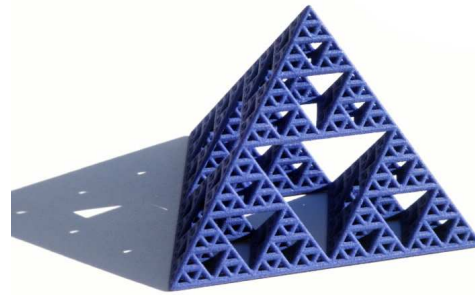
Tegyük fel, hogy az így kapott fraktál minden csúcsába egy olyan spint teszünk, aminek spinvektora kétkomponensű, egységnyi hosszú, és bármilyen pontba mutathat az egységkörön (tehát nem csak  $\pm 1$  lehet az értéke)! A spinek közötti kölcsönhatás legyen a megszokott

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j,$$

ahol a spinek csak közvetlen szomszédjukkal tudnak kölcsönhatni. Lesz-e ferromágneses fázis a 2D-s esetben? És magasabb dimenzióban (pl. a Sierpiński-gúla esetén)?



a)



b)

(Vass Máté)

47. Tekintsünk egy  $N$  darab elektronból álló részecskehalmazt, melyek azonos erősséggel egyetlen elektromágneses módushoz vannak csatolva. A módus lineárisan poláros. Kizárólag a dipólközelítésre szorítkozva a Hamilton-operátor így írható:

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m} \left[ \mathbf{p}_k - e\mathbf{A} \right]^2 + \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right), \quad \text{ahol} \quad \mathbf{A} \approx \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\mu V \epsilon_0}} \mathbf{e}_\mu (a_\mu + a_\mu^+).$$

Keressük meg a rendszer energia-sajátállapotait! Milyen, a problémához jól illő módon jellemezhetjük az  $N$  részecske impulzustér-beli rendezetlenségét? Milyen hatással van ez az energia-sajátértékekre?

(Gombkötő Ákos)

48. Egy tudospár a következő kísérletet valósítja meg: Nagyon távol mindenféle érzékelhető gravitációtól, kialakítanak egy maximálisan összefonódott

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B)^M$$

állapotot két tömeg nélküli, bozonikus, skalármező módusban, úgy hogy két detektor közül az egyik az  $A$ , a másik a  $B$  alrendszerben méri. Az  $M$  index itt azt jelöli, hogy Minkowski-térbeli nulla/egyrészecske-állapotokról van szó.

A két detektor egymáshoz végig nagyon közel van, így közelítenek meg egy fekete lyukat. Utóbb azonban elválnak útjaik, az  $A$  detektor geodetikus mozgást végezve belép az eseményhorizontba, míg  $B$  a geodetikus pályához képest gyorsulva elkerüli az eseményhorizontot. Becsüljük meg az összefonódottság mértékét a relatív gyorsulás pillanatában!

*Segítség:* Használjunk a számításhoz Rindler-koordinátázást, és vegyük a nagy gyorsulású határértéket. A  $|0\rangle_B$  Minkowski-vákuumállapot a Rindler-téren értelmezett módusokra a következőképpen bontható:

$$|0\rangle_B \propto \frac{1}{\cosh \epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n \epsilon |n\rangle_B^I |n\rangle_B^{II}$$

ahol az  $I, II$  jelölések a Rindler-koordinátázásbeli régiók módusaira vonatkozik. Fennáll, hogy

$$\cosh \epsilon = (1 - e^{-\frac{C}{a}})^{-1/2},$$

ahol  $C > 0$  a módustól függő konstans,  $a$  pedig a gyorsulás.

(Gombkötő Ákos)

49. Egy tetszőleges  $\Phi$  térmennyiség kvantumtérelméleti egyrészecske-irreducibilis (1PI) effektív potenciáljának általánosításaként előálló kétrészecske-irreducibilis (2PI) változat a

$$V_{2\text{PI}}[\bar{\Phi}, G] = V_{\text{cl}}[\bar{\Phi}] + \frac{i}{2} \int_k \text{Tr} \log G(k) - \frac{i}{2} \int_k \text{Tr}[G_0^{-1}(k)G(k)] + iV_2$$

kétváltozós funkcionál, melynek első és második változója szerinti deriváltak eltűnésének feltétele rendre a homogén kondenzátumot ( $\bar{\Phi}$ ) meghatározó téregyenlettel, és a propagátor ( $G$ ) Dyson-egyenletével ekvivalens. Itt  $V_{\text{cl}}$  a klasszikus potenciál,  $G_0$  a fagráf szintű propagátormátrix  $\bar{\Phi}$  háttéren,  $V_2$  pedig az összes kétrészecske-irreducibilis Feynman-gráf összessége, mely a klasszikus hatás  $S[\Phi] \rightarrow S[\bar{\Phi} + \Phi]$  eltoltjának vertexeiből, és  $G$  vonalakból épül fel.

Konstruáljuk meg a  $\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  térmennyiség  $O(N)$  szimmetriájú,

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^T \phi - \frac{\lambda}{24N} (\phi^T \phi)^2$$

Lagrange sűrűségfüggvénnyel definiált elméletének 2PI effektív potenciálját az  $1/N$  sorfejtés vezetõn túli rendjében, azaz rajzoljuk fel az összes Feynman gráfot, mely  $V_2$ -be járulékot ad! (A renormálástól tekintsünk el.)

*Útmutatás:* használjuk az elmélet eredetivel egyenértékű, egy  $\alpha$  segédtérrel kiegészített megfogalmazását, melynek Lagrange sűrűségfüggvénye

$$L' = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^T \phi - \frac{1}{2} \alpha^2 + i \sqrt{\frac{\lambda}{12N}} \alpha \phi^T \phi,$$

és melyre az  $1/N$  sorfejtés vezetõn túli rendjében  $V_2$  csak egyetlen gráfot tartalmaz. Kiszöböljük ki  $V_{2\text{PI}}$ -ból az  $\alpha$  segédmennyiséget és propagátorait a fent említett stacionaritási feltételek alkalmazásával, majd az adódó eredmény alapján adjuk meg az összes szóban forgó gráfot!

(Fejős Gergely)

50. Dr. Absolutó Zéró, a kicsi, ám büszke egyenlítői ország, Gumipart Örökös Elnöke (a Haza Atyja, a Nép Barátja, a Gumipálmák Istápolója etc.) ismét magához hívatta udvari főfizikusát. Dr. Ali Tudde Mynek aggodalmakkal telve vágott át Port Gummy főterén, óvatos pillantást vetett az elnök Rózsaszínű Palotájával szemben álló Négylegnagyobb Vár [*most mit csináljak, tényleg így hívják – a szerző*] fokára, ahol e pillanatban éppen semmiféle szemléltető népnevelő tanulság sem függött. Vajon miféle fantasztikus szerkezetet kell ma összeeskábálnia, vagy elmagyaráznia, hogy miért nem lehetséges megvalósítani az elnök ötletét?

A diktátor széles mosollyal fogadta:

– Ugye tudja, hogy jövőre érkezik el a Gumiparti Köztársaság kikiáltásának 40 000-ik évfordulója? [*Negyvenezer. Jól olvastad. – a szerző*] Dicső ősem és elődöm, doktor Absolutó Minusz Ezerhétszázhuszonkilenc [*amúgy ez az első abszolút Euler-pszepseudoprím*] eme világraszóló tettét nekünk is hasonló eseménnyel kell megünnepelnünk. Helyezzük el országunk felett az államalapító képmását, hogy ha szorgos népünk bármely tagja felemeli fejét (mint ez örömteljes napjainkban gyakran előfordul), maga felett az égen megláthassa a dicső előd bölcs mosolyát, és a polgárokra bocsátott gondoskodó pillantását! Persze a képen az Alapító mellett ott kell lennie a mai Gumipartot felvirágoztató bölcs vezető arcának is, akit szerénységem tilt megnevezni. Ugye tudja, kiről beszélek?

A fizikus tudta. Inkább másról kérdezett.

– De Elnök úr, milyen módon akarja elhelyezni a képmásokat szorgos népünk feje fölött? Építünk talán egy égig érő tornyot?

– Ugyan, ilyesmi máshol is létezik. Különbön is, pár éve már épített ilyet [*lásd az 1993. évi Ortvay-verseny 5. feladatát*]. Valami sokkal nagyobb szabásúra gondoltam. A képeknek egyszerűen lebegniük kell a nép fölött! Természetesen a légkörön kívül, ahol eső, hó és madárürülék [*az elnök itt kissé népiesebben fejezte ki magát – a szerző*] vagy becsapódó drón nem szentségtelenítheti meg az arcokat.

– Igen, igen, Elnök úr a szinkronpályára gondol! Holnap rendelünk egy pozíciót, és nemsokára felküldhetjük oda a képeket – mondta boldogan a főfizikus, akinek a Heaven Seven (H7) ügy [*lásd az 1987. évi Ortvay-verseny 6. feladatát*] óta jelentős érdekeltségei voltak a szinkronpálya hasznosításával foglalkozó cégekben.

– Várjon csak! Milyen magasan van ez a szinkronúszó pálya vagy micsoda?

– Elnök úr, ezt pontosan tudom: 35 786 kilométer a Port Goomy kikötő átlagos vízszintje fölött.

– Ember, hát nem érti? Negyvenezret mondtam! Csak nem akar több ezer évet letagadni szorgos népünk dicsőséges történelméből? Tudja, ki próbálta meg ezt legutóbb? Az udvari történész... Ugye látta?

A fizikus látta, napokon át, a Négylegnagyobb Vár fokán. Így hát a számadattal kapcsolatban nem is volt több kérdése.

– Elnök úr, ha 40 000 km magasan akarjuk tartani a képeket, ahhoz erős rakétákra és rengeteg hajtóanyagra van szükségünk.

– Természetesen rendelkezésére áll a doktor Absolutó Zéróról elnevezett gumipálmaolaj-lepárló üzem teljes kapacitása. Holnaptól a gyár kizárólag rakéta-hajtóanyagot fog termelni.

– Elnök úr igen nagylelkű, de a gyár által készített, amúgy igen szép színű és kellemes illatú hajtóanyagnak van egy apró hibája: ha a légkörbe jut, rátelepszik a gumipálmákra, és igen gyorsan feloldja, mi több, szinte tövig kiegészíti a pálmákat. Ezért csak a földi légkörtől távol szabad alkalmazni.



– Hát persze, spriccelje kifelé a gumigázokat, úgy, hogy többé ne is juthassanak vissza a Földre! Legalább eldicsekedhetek azoknak a liláknak... nem, zöldeknek, hogy nem szennyezzük a Földet. De azért legyen takarékos, úgy programozza a rakétákat, hogy mindig az ehhez szükséges minimális sebességgel távozzanak a gázok! Ha egy kicsivel is többet használ el drága hazánk legfontosabb ipari nyersanyagából, magával fizettetem meg! [*A gumipálmák gazdasági hasznosságáról lásd a 2011. évi Ortvay-verseny 1. feladatát.*]

A főfizikus magában már el is kezdte a számításokat, amikor meghallotta az elnök végső és legmeglepőbb feltételét:

– De ez persze csak a kezdet! Dicső hazánk most éppen negyvenezer éves, ezért a képeket negyvenezer kilométer magasra kell elhelyezni. De mivel minden nap előbbre jutunk, és a határ a csillagos ég, a képeket minden nap egy kilométerrel magasabbra kell emelni. Persze az összes korábbi feltétel betartásával!

Az elnök óvatosan körülnézett, és közelebb hajolt a főfizikushoz:

– Magának megsúgom, miért annyira szívügyem ez a projekt. Gyerekkoromban, amikor a Négy-szögletű Kerek Gumierdőben gumimókusra vadásztam, egyszer találkoztam egy vénséges vén varázslóval. Ő megjósolta, hogy dicsőséges pályafutás vár rám. De azt is megmondta, hogy ez a szédületes karrier azon a napon fog véget érni, amikor már nem tudom a képemet magam és népem fölött lebegtetni, és minden nap magasabbra emelni. Nos hát így igyekezzen!

A főfizikus úgy igyekezett. Tudta, hogy a Négy-szögletű Kerek Gumierdő vénséges vén varázslói mindig igazat mondanak. Hamarosan elkészültek a sok ezer kilométerről is látható arcképek, az ezeket méltó helyükre juttató űrkompek rakétái, melyek Gumiparti Köztársaság kikiáltásának évfordulóján a nép lelkes éljenzése közepette magasba is emelték a képeket. Odafent bekapcsolódtak a képeket Port Gummy felett lebegtető gigászi rakéták is, a gumipálmaolaj jellegzetes színű és illatú égéstermékével árasztva el a Naprendszer távolabbi térségeit. A gumipálmák szorgosan teremtek, a gyárban éjjel-nappal folyt a lepárlás, és a tankoló űrkompek állandóan hordták az utánpótlást a hajtóműveknek. A Gumiparti Akadémia vírusíró szakértői által készített vezérlőprogramok pedig tették a dolgukat, az elnök kívánságának megfelelően irányítva a képek naponkénti emelkedését és a gumigázok optimális kibocsátását is. Gumiparton köztudomásulag a Rend uralkodik, ezért ebben a mechanizmusban soha semmi nem romlik el, nem fogy el, nem akad meg... A szorgos nép, ha fejét olykor felemeli, egyszerre láthatja maga fölött – napról napra egyre magasabban – az Alapító és a Haza Atyja óvó tekintetét.

Nekünk már csak egy kérdésünk maradt: az arcképek ünnepélyes felbocsátásától számítva hány napig tart még dr. Absoluo Zéró dicsőséges uralkodása?

(Dávid Gyula)

\end{document}